SAYILAR

Doğal Sayılar Kümesi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Negatif Doğal Sayılar Kümesi $\mathbb{N}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$

Tam Sayılar Kümesi $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^- = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Rasyonel Sayılar Kümesi: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \text{obeb}(m,n) = 1\}$

Irrasyonel Sayılar Kümesi: $\mathbb{Q}^t = \{x : x \notin \mathbb{Q}\}$

Örnek: $\pi, e, \sqrt{3}$ sayıları irrasyoneldir.

Reel Sayılar Kümesi $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^t$

ARALIKLAR

1) a b açık aralığı

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

2) a b kapalı aralığı

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

3) a açık, b kapalı aralığı

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

a kapalı, b açık aralığı

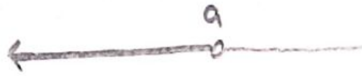
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Uyarı: (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ ve $[a,b]$ aralıkları birbirinden farklı olmasına rağmen hepsinin boyu $b-a$ kadardır.

4) $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$



$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesi: $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kümesine genişletilmiş reel sayılar kümesi denir ve $\tilde{\mathbb{R}}$ ile gösterilir.

$\tilde{\mathbb{R}}$ de bazı işlemler

Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için

$a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$

$a > 0$ ise $a\infty = \infty$, $a(-\infty) = -\infty$, $\frac{\infty}{a} = \infty$, $\frac{-\infty}{a} = -\infty$

$a < 0$ ise $a\infty = -\infty$, $a(-\infty) = \infty$, $\frac{\infty}{a} = -\infty$, $\frac{-\infty}{a} = \infty$

$\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty . \infty = \infty$, $(-\infty)(-\infty) = \infty$

$\infty . (-\infty) = -\infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$, $\frac{a}{-\infty} = 0$

Bunların dışında kalan $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 . \infty$, 1^∞, 0^∞, ∞^0 ve $\frac{\infty}{\infty}$ işlemlerine $\tilde{\mathbb{R}}$ de belirsizlikler denir.

Mutlak Değer: Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ sayısının orijine uzaklığına x in mutlak değeri denir ve $|x|$ ile gösterilir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Mutlak Değer Özellikleri

$a, x, y \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ olsun.

1) $|x| \geq 0$ 2) $|x| = a \Rightarrow x = a \vee x = -a$

3) $|xy| = |x||y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

4) $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

5) $|x| > a \Rightarrow x > a \vee x < -a$

$|x| \geq a \Rightarrow x \geq a \vee x \leq -a$

6) $|x| = |y| \Rightarrow x = \mp y$

7) $\sqrt{y^2} = |y|$

8) $-|x| \leq x \leq |x|$

9) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (üçgen eşitsizliği)

10) $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Örnek: $\left|\frac{2x-3}{2x-6}\right| = \frac{2x-3}{2x-6}$ ise çözüm kümesini bulunuz.

$\frac{2x-3}{2x-6} \geq 0$ olmalıdır. İşaret tablosu yapılırsa

x		$3/2$		3	
$2x-3$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-6$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2x-3}{2x-6}$	$+$	0	$-$		$+$

$ÇK = (-\infty, \frac{3}{2}] \cup (3, \infty)$

Örnek: $|5x+1| = 3$ ise çözüm kümesini bulunuz.

$5x+1 = 3$ veya $5x+1 = -3$ olmalı

$\Rightarrow x = \frac{2}{5}$ veya $x = -\frac{4}{5} \Rightarrow ÇK = \{-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\}$

Tam Değer: $x \in \mathbb{R}$ olsun. x den küçük yada eşit olan en büyük tamsayıya x in tam değeri denir ve $[\![x]\!]$ ile gösterilir.

Örnek: $[\![3,2]\!] = 3$, $[\![3]\!] = 3$, $[\![-1,2]\!] = -2$, $[\![-1]\!] = -1$

$[\![\pi]\!] = 3$, $[\![e]\!] = 2$

Tam Değerin Özellikleri

$x, y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$ olsun.

1) $[\![x]\!] = a \Rightarrow a \leq x < a+1$

2) $[\![x \mp a]\!] = [\![x]\!] \mp a$

3) $[\![x+y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$

4) $x = [\![x]\!] + t \ , \ 0 \leq t < 1$

5) $[\![x]\!] \leq x$

6) $[\![x]\!] < a \Rightarrow x < a$

Örnek: $[\![-3x]\!] = -3$ ise çözüm kümesini bulunuz.

$-3 \leq -3x < -2 \Rightarrow 1 \geq x > \frac{2}{3} \Rightarrow Ç.K = (\frac{2}{3}, 1]$

Örnek: $-2 < [\![2x-4]\!] \leq 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$-1 \leq 2x-4 < 2$ olmalıdır.

$\Rightarrow 3 \leq 2x < 6 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 3 \Rightarrow ÇK = [\frac{3}{2}, 3)$

FONKSİYONLAR

8

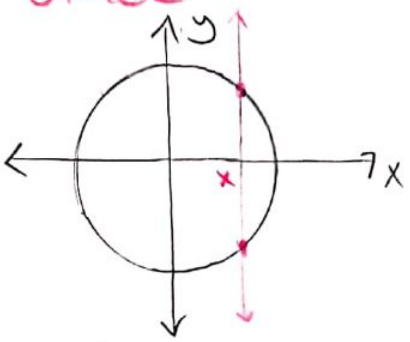
Fonksiyon: A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A daki her elemanı B deki yalnız bir eleman ile eşleyen kurala A dan B ye bir fonksiyon denir. A ya tanım kümesi, B ye ise değer kümesi denir. A daki elemanların eşlendiği B deki elemanların kümesine ise görüntü kümesi denir.

Örnek:

Fonksiyon	Tanım kümesi	Görüntü kümesi
$y = x^2$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4-x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

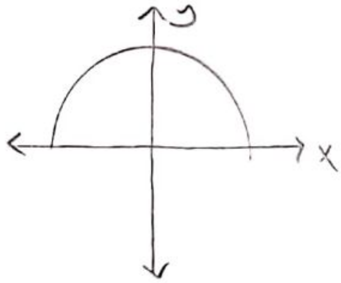
Bir fonksiyon için dikey doğru testi: Bir f fonksiyonu, tanım kümesindeki her x için sadece bir $f(x)$ değerine sahip olduğundan hiçbir dikey doğru fonksiyonun grafiğini birden fazla yerde kesemez.

Örnek



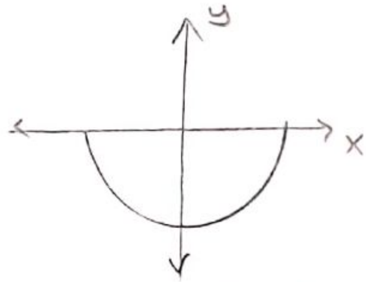
$x^2+y^2=1$

Fonksiyon değil



$y=\sqrt{1-x^2}$

Fonksiyon



$y=-\sqrt{1-x^2}$

Fonksiyon

Artan-Azalan Fonksiyonlar: $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak 10
üzere herhangi iki $x_1, x_2 \in I$ verilsin.

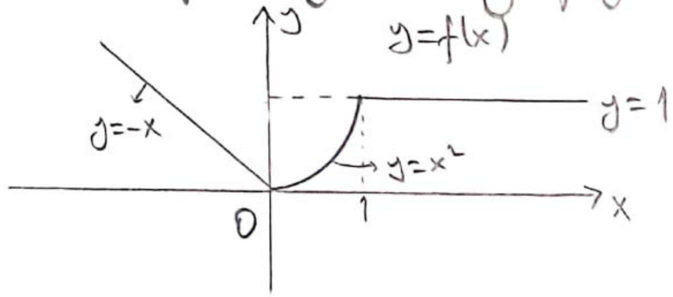
$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde artandır denir.

$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde azalandır denir.

Örnek: $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1<x \end{cases}$ fonksiyonu $(-\infty, 0]$ aralığında azalan, $[0,1]$ aralığında artan, $(1,\infty)$ aralığında ne azalan ne de artandır.

Uyarı: Reel eksende soldan sağa hareket edildiğinde fonksiyonun grafiği yükseliyorsa fonksiyon artan, alçalıyorsa fonksiyon azalandır.

Örnekteki fonksiyonun grafiğine bakalım:



Tek-Çift Fonksiyonlar: $f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $x \in D$ için $f(-x)=f(x)$ oluyorsa f e çift fonksiyon, $f(-x)=-f(x)$ oluyorsa f e tek fonksiyon denir.

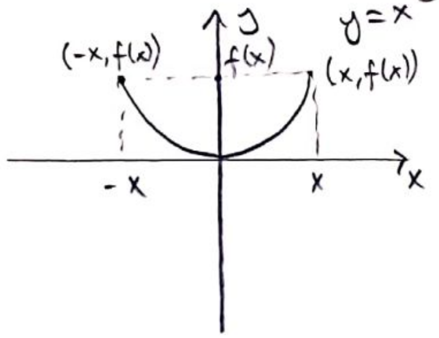
Örnek: $f(x)=x^2$ çift fonksiyondur. Çünkü;

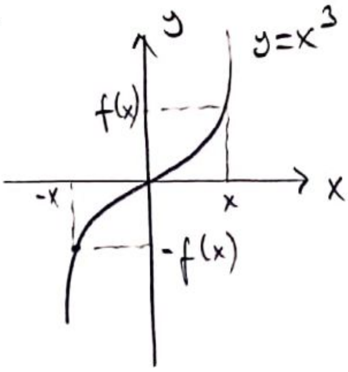
$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ dir.

- $g(x)=x^3$ tek fonksiyondur. Çünkü;

  $g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$ dir.
- $h(x)=x+1$ ne tek ne de çift fonksiyondur.

Uyarı: f bir çift fonksiyon ise $(x,f(x))$ ve $(-x,f(x))$ 12 fonksiyonun grafiği üzerinde olacağından f in grafiği y eksenine göre simetriktir. f bir tek fonksiyon ise $(x,f(x))$ ve $(-x,-f(x))$ fonksiyonun grafiği üzerinde olacağından f in grafiği orijine göre simetriktir.



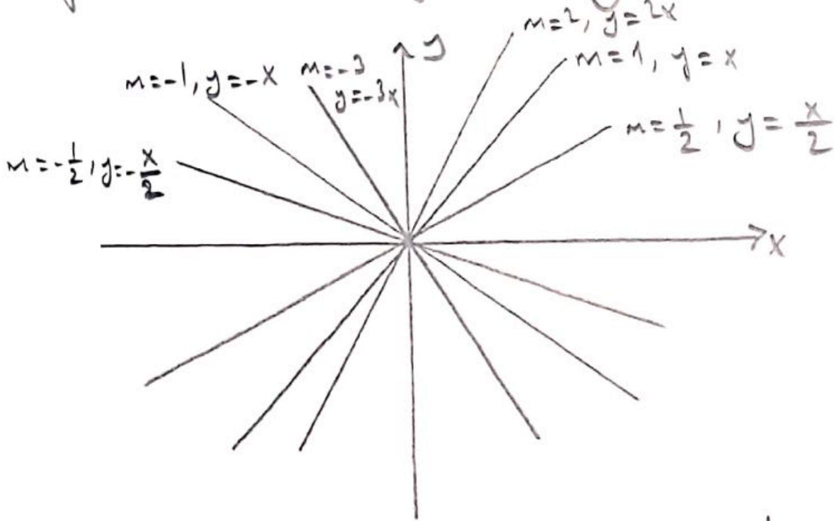


Özel Fonksiyonlar

Lineer Fonksiyonlar: m ve n sabit olmak üzere $f(x)=mx+n$ şeklindeki fonksiyona lineer fonksiyon denir.

$m=1, b=0$ için $f(x)=x$ fonksiyonuna birim fonksiyon denir.

$b=0$ ise $f(x)=mx$ orijinden geçer.



Uyarı: $f(x)=mx+n$ fonksiyonu eğimi m olan doğrudur.

Eğim $m=0$ ise $f(x)=b$ fonksiyonuna sabit fonk- 14
siyon denir.

Kuvvet fonksiyonu: a sabit bir sayı olmak üzere $f(x)=x^a$ fonksiyonuna kuvvet fonksiyonu denir.